Lösningsförslag till tentamen 130603 i Reglerteknik (endast problemdelen)

2.

Ett typiskt 2:a ordn. system (underdämpat)

$$G(s) = \frac{0{,}33 \cdot \omega_0^2/2}{s^2 + 2\varphi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

a) Avläsning ger:

$$\begin{cases} t_p = 0{,}55 = \dfrac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\varphi^2}} \Rightarrow \omega_0 = 5{,}9 \text{ rad/sek} \\ M = \dfrac{0{,}48-0{,}33}{0{,}33} \approx 0{,}45 = e^{-\frac{\varphi\pi}{\sqrt{1-\varphi^2}}} \Rightarrow \varphi = 0{,}25 \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{0{,}33 \cdot 5{,}9^2/2}{s^2 + 2\varphi\omega_0 s + 5{,}9^2} \approx \frac{11{,}5}{s^2 + 2{,}95 s + 34{,}8}$$

b)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{11{,}5/2}{s^2 + 2{,}95 s + 34{,}8}$$

$$Y(s)\left(s^2 + 2{,}95 s + 34{,}8\right) = \frac{11{,}5}{2} \cdot U(s)$$

$$y''(t) + 2{,}95 \cdot y'(t) + 34{,}8\, y(t) = \frac{11{,}5}{2} \cdot u(t)$$

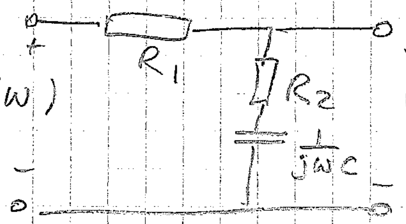
c) $t_p = 0{,}55$ sek, $t_r = 1{,}2$ sek, $M = 0{,}45$, $t_{sr} = 2{,}2$ sek

3. Bestäm överföringsfunktion!

a) Insignal: u_1 [Volt]
Utsignal: u_2 [Volt]

Räkna på komplex form (Jämför Elläran!)

IN $U_1(j\omega)$



$U_2(j\omega)$ UT

spänningsdelning ger: $U_2(j\omega) = U_1(j\omega) \cdot \dfrac{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C}}$

$$H(j\omega) = \frac{U_2}{U_1}(j\omega) = \frac{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{\left(\frac{j\omega C}{1}\right)}{\left(\frac{j\omega C}{1}\right)} = \frac{j\omega R_2 C + 1}{j\omega C(R_1 + R_2) + 1}$$

Egentligen frekvensfunktion ≈ överföringsfunktion

$\omega \to 0$: $H(0) = 1$
$\omega \to \infty$: $H(\infty) = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$

LågPassfilter

$$H(j\omega) = \underbrace{|H(j\omega)|}_{\text{amplitud-funktion}} \cdot e^{j \underbrace{\arg\{H(j\omega)\}}_{\text{fasfunktion}}}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{1^2 + (\omega R_2 C)^2}}{\sqrt{1^2 + (\omega C(R_1 + R_2))^2}}$$

$$\arg\{H(j\omega)\} = \arctan\left(\frac{\omega R_2 C}{1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega C(R_1 + R_2)}{1}\right)$$

Amplitud- och fasfunktion kan ritas upp i Bodediagram.

Rita Bodediagram!

... a forts.

$C = 1mF$, $R_2 = 1k\Omega$, $R_1 = 1k\Omega$

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{1+(\omega)^2}}{\sqrt{1+(2\omega)^2}}$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|H(j\omega)|$$

$$\arg\{H(j\omega)\} = \arctan(\omega) - \arctan(2\omega)$$

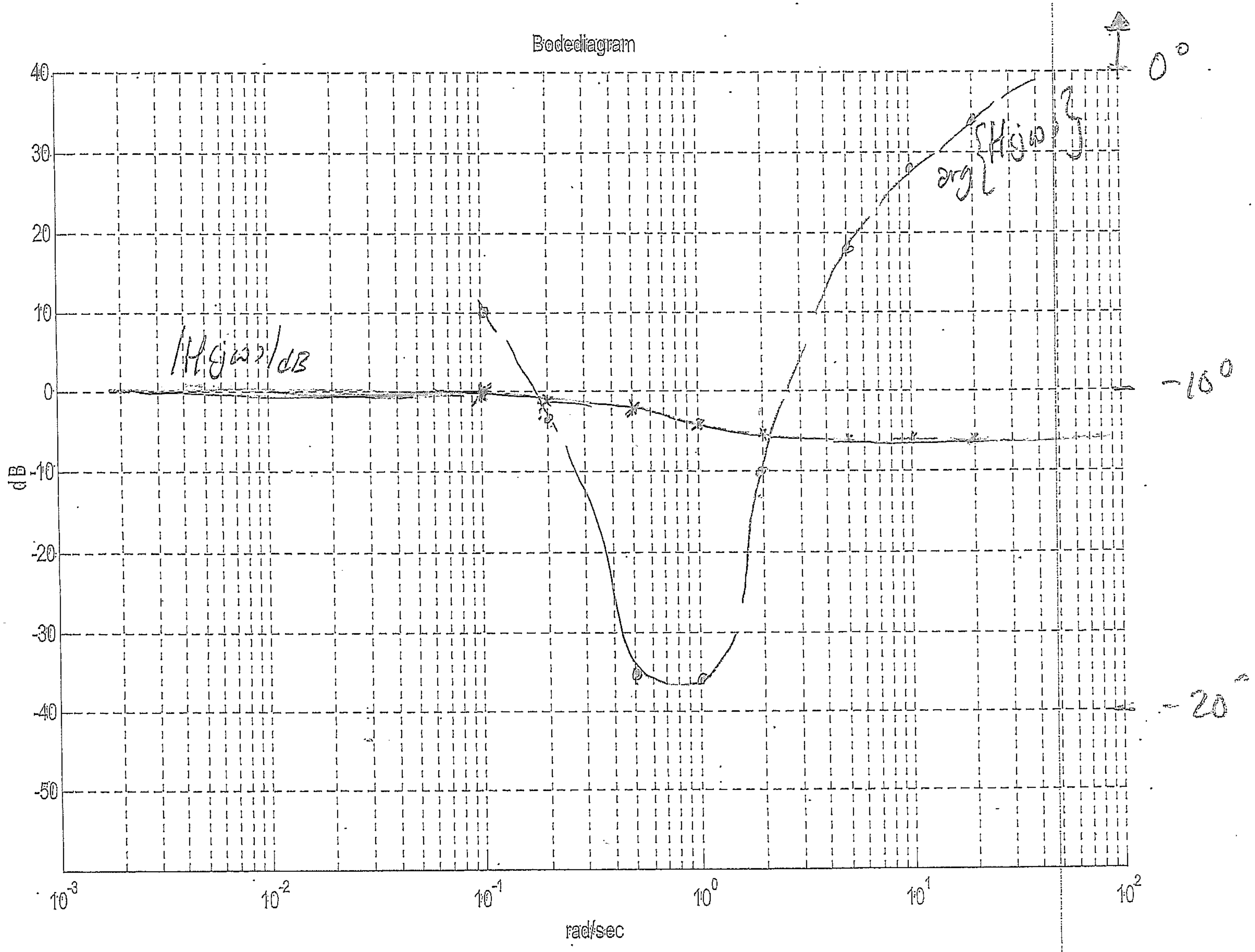
ω	$\arg(H(j\omega))$	$\|H(j\omega)\|$	$\|H(j\omega)\|_{dB}$
0,1	$-6°$	0,99	$-0,13$
0,2	$-10,5°$	0,5	$-0,45$
0,5	$-18,4°$	0,79	$-2,0$
1	$-18,4°$	0,63	-4
2	$-12,5°$	0,54	$-5,3$
5	$-5,6°$	0,51	$-5,9$
10	$-2,8°$	0,50	-6
20	$-1,4°$	0,50	-6

Hur stor blir utsignalen från systemet om insignalen är sinusformad med amplituden 10V och vinkelfrekvensen, $\omega = 1$ rad/s? (Avläs i tabell eller Bodediagram!)

$$y(t) = |H(j\omega)| \cdot 10 \sin(1t + \arg\{H(j\omega)\}) =$$

$$= 0,63 \cdot 10 \sin(1t - 18,4°) = 6,3 \sin(t - 18,4°)$$

a)



Bodediagram
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
dB
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
rad/sec
$|H(j\omega)|_{dB}$
$\arg\{H(j\omega)\}$
0°
-10°
-20°

4. $G_{PI}(s) = K\left(1 + \frac{1}{0{,}2s}\right)$ $\quad G_p = \frac{12}{s^2+2s+1}$

a) karakt. ekv: $1 + G_{PI} \cdot G_p(s) = 0 \iff 1 + K\left(\frac{0{,}2s+1}{0{,}2s}\right) \cdot \frac{12}{s^2+2s+1}$

Routh-Hurwitz: $0{,}2s^3 + 0{,}4s^2 + 0{,}2s + 2{,}4Ks + 12K = 0$

s^3	$0{,}2$	$0{,}2+2{,}4K$	0
s^2	$0{,}4$	$12K$	0
s^1	$\frac{0{,}4(0{,}2+2{,}4K)-2{,}4K}{0{,}4}$	0	
s^0	$12K$		

$12K \to K > 0$ för stabilt system

$0.08 + 0{,}96K - 2{,}4K > 0$

$0.08 > 1{,}44K$

$\frac{0.08}{1{,}44} > K$

$0 < K < 0{,}0556$

$A_m = 1$ ggr

b)

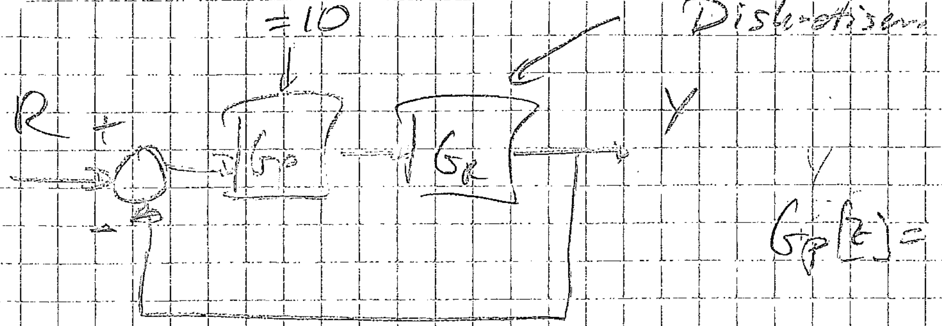
$K = \frac{0.0556}{4} \rightarrow A_m = 4$ ggr

c) $e_{ss} = 0$ vid börvärdessteg eftersom vi har integration.

$e_{ss} = \frac{1}{K_1}$ Kretsöverföringen vid låga frekvenser är: $\frac{12K}{0{,}2s} = \frac{K_1}{s}$

$e_{ss} = \frac{1}{60K} = \frac{1}{\frac{0.0556}{4} \cdot 60} \hat{=} 1{,}2$ enheter " vid ramp"

5



a)

$$G_p(z) = \frac{3\left(1-e^{-h/12}\right)z^{-1}}{1-e^{-h/12}z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_p \cdot G_R}{1+G_p \cdot G_R}$$

Karakt. ekv.: $1 + G_p \cdot G_R = 0$

$$1 + \frac{30\cdot\left(1-e^{-h/12}\right)z^{-1}}{1-e^{-h/12}z^{-1}} = 0$$

$$1 - e^{-h/12}z^{-1} + 30z^{-1} - 30e^{-h/12}z^{-1} = 0$$

$$1 = \left(31e^{-h/12} - 30\right)z^{-1}$$

$$z = 31e^{-h/12} - 30 \qquad |z| < 1 \quad \text{dvs} \quad \underline{h < 0{,}8\,\text{sek}}$$

b) Halverer vi K nu til 5 fås $A_m = 2$ ggr.

c)

$$H_p(z) = \frac{0{,}1935z^{-1}}{1-0{,}9355z^{-1}} \qquad \frac{Y(z)}{R(z)} = H(z) = \frac{\dfrac{5\cdot 1{,}935z^{-1}}{1-0{,}9355z^{-1}}}{1+\dfrac{5\cdot 0{,}1935z^{-1}}{1-0{,}9355z^{-1}}}$$

$$= \frac{5\cdot 1{,}935z^{-1}}{1-0{,}9355z^{-1}+5\cdot 0{,}1935z^{-1}} \Rightarrow H(1) = \frac{5\cdot 0{,}1935}{1-0{,}9355+5\cdot 0{,}1935} \approx 0{,}9375$$

Ingen integrasjon ger $\Rightarrow e_{ss} = 1 - 0{,}9375$

5c

$$\frac{Y}{V} = \frac{H_p}{1+H_R H_p} = \frac{\dfrac{0{,}1935 z^{-1}}{1-0{,}9355 z^{-1}}}{1+5\cdot\dfrac{0{,}1935 z^{-1}}{1-0{,}9355 z^{-1}}} = \frac{0{,}1935 z^{-1}}{1-0{,}9355 z^{-1} + 5\cdot 0{,}1935 z^{-1}}$$

$$\frac{Y}{V}(1) = 0{,}1875$$

Kvarstående fel efter störning rimligt eftersom ingen integration.

6.

$$G_p(s) = \frac{4e^{-s}}{s} \xrightarrow[h=1\,sek]{} H_p(z) = \frac{4 \cdot 1 z^{-1}}{1-z^{-1}} \cdot z^{-1} = \frac{4z^{-2}}{1-z^{-1}}$$

a) $H_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ $\quad$ grad $(B) = 2$, grad $(A) = 1$

grad $(P) = 2 \Rightarrow P(z) = (1 - 0{,}2z^{-1})$

$$P = AC + BD$$

$$(1 - 0{,}2z^{-1}) = (1 - z^{-1}) \cdot (1 + c_1 z^{-1}) + 4z^{-2} \cdot d_0$$

Identifiering ger:

z^{-0}: $\quad 1 = 1$

z^{-1}: $\quad -0{,}2 = -1 + c_1 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0.8$

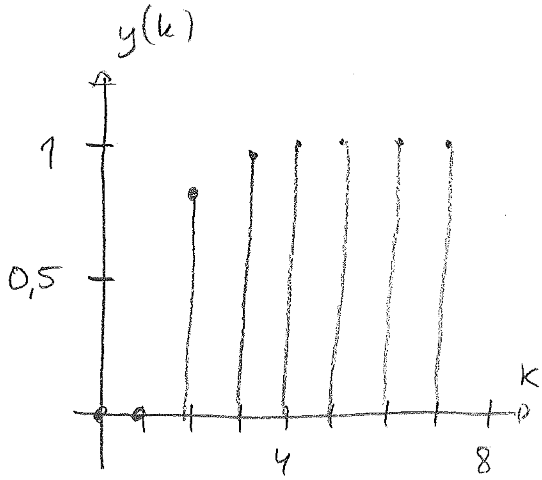
z^{-2}: $\quad 0 = -c_1 + 4d_0 \quad \rightarrow \quad d_0 = 0{,}2$

$$K_r = \frac{P(1)}{B(1)} = \frac{0{,}8}{4} = 0{,}2$$

a) $$\frac{Y(z)}{R(z)} = K_r \cdot \frac{B(z)}{P(z)} = \frac{0{,}2 \cdot 4z^{-2}}{1 - 0{,}2z^{-1}} = \frac{0{,}8z^{-2}}{1 - 0{,}2z^{-1}}$$

$$y(k) = 0{,}2\,y(k-1) + 0{,}8\,r(k-2)$$

k	y(k)	0.2 y(k-1)	+	0.8 r(k-2)
0	0	0	+	0
1	0	0	+	0
2	0.8	0	+	0.8
3	0,96	0,16	+	0.8
4	0,992	0,192	+	0.8
5	0,9984	0,1984	+	0.8
6	0,9997	0,1997	+	0.8
7	0,9999	0,1999	+	0.8

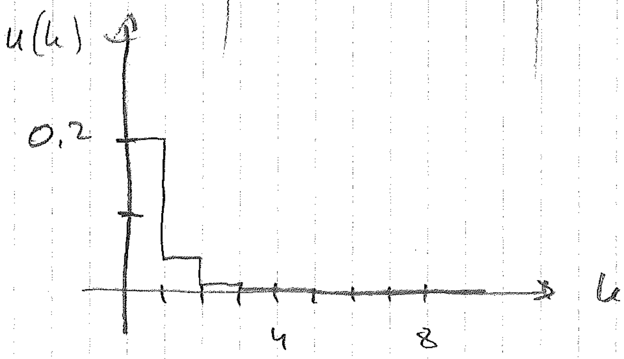


6b

$$R(z)\cdot K_r - Y(z)\cdot D(z) = C(z)\cdot U(z)$$

$$r(k)\cdot 0{,}2 - y(k)\cdot 0{,}2 = u(k) + 0{,}8\,u(k-1)$$

k	$u(k) =$	$r(k)\cdot 0{,}2$	$- y(k)\cdot 0{,}2$	$- 0{,}8\cdot u(k-1)$
0	0,2	0,2	0	0
1	0.04	0.2	0	− 0,16
2	0.008	0.2	− 0,16	− 0.032
3	0.0016	0.2	− 0,192	− 0.0064
4	$3\cdot 10^{-4}$	0.2	− 0,1984	− 0.0013
5	$6\cdot 10^{-5}$	0.2	− 0,1997	− 0.00024
6	$5{,}2\cdot 10^{-5}$	0.2	− 0,1999	− 0.000048
7		0,2	− 0,19999	− 0.0000416



6c)

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{BC}{P} = \frac{4z^{-2}\cdot(1+0{,}8z^{-1})}{(1-0{,}2z^{-1})}$$

$$\frac{Y(1)}{V(1)} = \frac{4\cdot 1{,}8}{0{,}8} = 4\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{5}{4} = 9 \text{ enheter fel.}$$

Kvarstående fel $e_{ss} = -9$ enheter fel.

System II och III svarar mot snabba frekvenser: $\omega_0 = \sqrt{30}$

7. fås genom

$$G(s) = \frac{K\,\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad \{K = 1\}$$

ζ = dämpkonstant

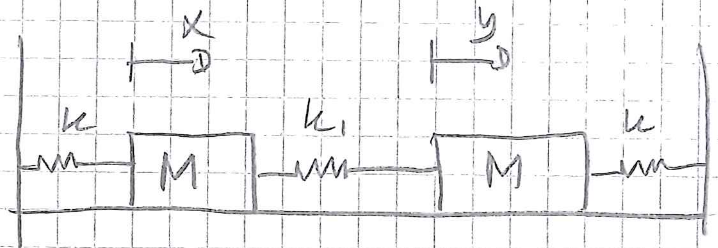
System B och C är troliga.

System D har lägre dämpning

SVAR: A, IV   C, III

B, I   D, II

8.

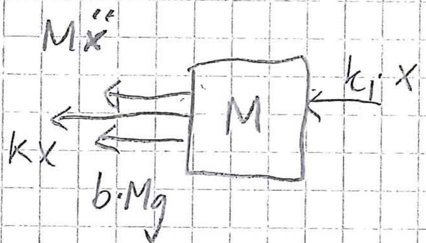


Friktions koeff. är b.

Dela upp förloppet i 2 bitar.

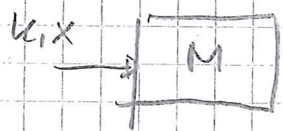
Massa till vänster: denna är fixerad, höger massa förflyttas åt höger.

Massa till vänster: denna förflyttas åt höger, massa höger oförändrad

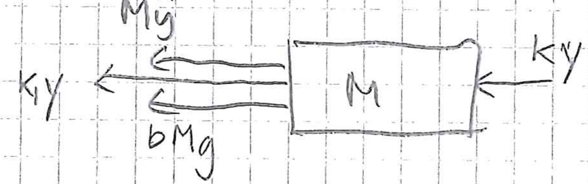


Summation ger: $M\ddot{x} + kx + k_1(x-y) + bMg = 0$ (Ekv 1)

Massa till höger: denna fixeras, massan till vänster skjuts åt höger



Massa till höger: denna förskjuts åt höger, vänster massa fixerad.



Summation ger: $M\ddot{y} + k_1(y-x) + ky + bMg = 0$ (Ekv 2)

8 fait

Laplace transformere!

$$\begin{cases} X(s)\left(Ms^2+k+k_1\right)+bMg = k_1\cdot Y(s) \\ Y(s)\left(Ms^2+k_1+k\right)+bMg = k_1\cdot X(s) \end{cases}$$

$$X(s)\left(Ms^2+k+k_1\right)-k_1Y(s) = Y(s)\left(Ms^2+k_1+k\right)-k_1X(s)$$

$$X(s)\left(Ms^2+k+2k_1\right) = Y(s)\left(Ms^2+k+2k_1\right)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = ?$$